Olimpiada de matematică – etapa pe sector
21 februarie 2004

SOLUȚII ȘI BAREM DE CORETARE
Clasa a XII-a

Subiectul I
a) **4 p**

$$I_1+I_2=\int\sqrt{\mathrm{tg}^2x+\mathrm{ctg}^2x}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}\,x=\int\sqrt{\left(\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x\right)^2+2}\cdot\left(\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x\right)'\,\mathrm{d}\,x=\int\sqrt{t^2+2}\,\mathrm{d}\,t$$

$$I_2-I_1=\int\sqrt{\left(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x\right)^2-2}\cdot\left(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x\right)'\,\mathrm{d}\,x=\int\sqrt{u^2-2}\,\mathrm{d}\,u.$$ 2 p

Finalizare 2 p

b) i) $f(t)=\begin{cases}\sqrt{1-4t}, & t\le 0\\ 1, & t\in\left(0,\frac{1}{4}\right]\\ 2\sqrt{t}, & t>\frac{1}{4}\end{cases}$

f continuă $\Rightarrow f$ admite primitive 2 p

ii) $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t=\frac{17}{12}$ 1 p

Subiectul II **7 p**

f continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ integrabilă pe orice $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

$\frac{\sin x}{x}<1$, $\forall x>0$. Avem $0<x_1<\pi\Rightarrow 0\le f(x)\le 1$, $\forall x\in[0,x_1]\subset(0,\pi)\Rightarrow$

$\Rightarrow 0\le\int_0^{x_1}f(x)\,\mathrm{d}\,x\le\int_0^{x_1}\mathrm{d}\,x=x_1\Rightarrow 0\le x_2\le x_1<\pi$. Prin inducție, din $0<x_n<\pi\Rightarrow 0\le f(x)\le 1$, $\forall x\in[0,x_n]\subset[0,\pi)\Rightarrow 0\le\int_0^{x_n}f(x)\,\mathrm{d}\,x\le\int_0^{x_n}\mathrm{d}\,x=x_n<\pi\Rightarrow 0\le x_{n+1}<\pi$; Din $(x_n)_{n\ge1}$ descrescător și minorat $\Rightarrow(x_n)_{n\ge1}$ convergent. Notăm $L=\lim_{n\to\infty}x_n$. Trecând la limită în relația de recurență obținem $L=\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}\,x$. Considerând funcția $F(y)=\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}\,x$, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, și $g(y)=y-F(y)$, $\forall y\in\mathbb{R}$; g este derivabilă.

$g'(y)=1-F'(y)=1-f(y)$. Ecuația $g(y)=y$ are unica soluție $y=0$. Din $L=0$.

Subiectul III **7 p**

a) Evident 2 p

b) $x=(a,b)\in G$; $a^{p^{k-1}}=e_1$, $b^{\frac{n}{p^{k-1}}}=e_2$.

p^{k-1} divide $\frac{n}{p}$; $\frac{n}{p^{k-1}}$ divide $\frac{n}{p}$, deci $x^{\frac{n}{p}} = (e_1, e_2) = \mathrm{e}$; $|G| = n$, deci în total sunt *n* soluții. 5 p

Subiectul IV **7 p**

Grupul $(\mathbb{Q}_+^*, \bullet)$ este generat de mulțimea *P* a numerelor prime $(P = \{p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots\})$.

Grupul $(\mathbb{Q}, +)$ este generat de mulțimea $M = \left\{ \frac{1}{n!} \middle| n \in \mathbb{Z}^* \right\}$. 2 p

Funcția *f* va acționa astfel : $f(p_i) = \frac{1}{i!}$, $f(1) = 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}^*$. Dacă $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $r \neq 1$, $r = p_{i_1}^{k_1} \ldots p_{i_n}^{k_n}$ unde $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$ sunt prime şi $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ 4 p

Atunci $f(r) = \frac{k_1}{i_1!} + \ldots + \frac{k_n}{i_n!}$. Dacă $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q} = \frac{p(q-1)!}{q!}$. De aceea $r = f\left(p_q^{p(q-1)!}\right)$ şi de aici rezultă că *f* este surjectivă. Evident *f* este morfism de grupuri. 1 p